Aufgaben zur gleichförmigen Bewegung

Aufgaben

1. Ein Radfahrer startet um 7.00 Uhr in Leipzig und fährt mit der mittleren Geschwindigkeit 20 km/h nach Berlin. Um 9.00 Uhr fährt ein Auto von demselben Punkt in dieselbe Richtung ab. Es besitzt die mittlere Geschwindigkeit 80 km/h. Wann und nach welcher Strecke hat das Auto den Radfahrer eingeholt?

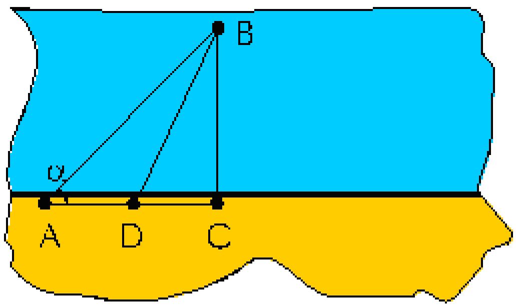
2. Mit welcher Geschwindigkeit muss das Erdöl in einer Rohrleitung von 100 cm² Querschnitt fließen, damit im Laufe einer Stunde 18 m³ davon hindurchfließen?

3. Ein Auto mit 60 kmh^{-1} wird von einem zweiten mit 70 kmh^{-1} überholt. Wie lange dauert der Überholvorgang und welche Fahrstrecke muss der Überholer dabei zurücklegen?
Der gegenseitige Abstand vor und nach dem Überholen betrug 20 m und beide Wagen sind je 4 m lang.

4. Zur Zeit t_0= 0 fährt 60m vor einem PKW (V_{Pkw}= 54km/h) eine Straßenbahn mit einer Geschwindigkeit von 36km/h. Beide behalten ihre Geschwindigkeit bei.
a) Wie viel Meter muss der PKW fahren, bevor er die Straßenbahn erreicht?
b) Welche Strecke legt die Straßenbahn in dieser Zeit zurück?
c) Wann erreicht der PKW die Straßenbahn?

5. Ich fahre mit 130 km/h auf der rechten Spur der Autobahn und nähere mich einem mit 100 km/h fahrenden LKW von 10 m Länge. Als ich 100 m hinter dem LKW bin und zum Überholen ansetzen will, fahre ich an der Anzeigetafel 1000 m vor meiner Abfahrt vorbei. Wie weit vor der Abfahrt schließt man den Überholvorgang ab, wenn man ordnungsgemäß im 2-s-Abstand vor dem LKW wieder auf die rechte Fahrbahn wechselt? Mein Auto hat eine Länge von 4 m.
(2-s-Abstand: Sicherheitsabstand zwischen zwei Fahrzeugen; ist der Abstand, den ein Fahrzeug in 2 s zurücklegt.)

6.
Hein, Jan und Fiete liegen am Strand und sehen in 160 m Entfernung eine Boje im Wasser schaukeln. (AB) Sie fragen sich: „Auf welchem Weg gelangt man wohl am schnellsten zu Boje, wenn man im Wasser mit einem Meter pro Sekunde schwimmen kann, auf dem Land aber dreimal so schnell ist." Um am Strand auf die Höhe der Boje zu gelangen, müßten sie 100 m gerade am Ufer entlang laufen. (AC)
Wie weit müssen sie am Ufer laufen (AD), um dann direkt auf die Boje zuzuschwimmen und dabei die kürzeste Zeit benötigen?



Lösungen:

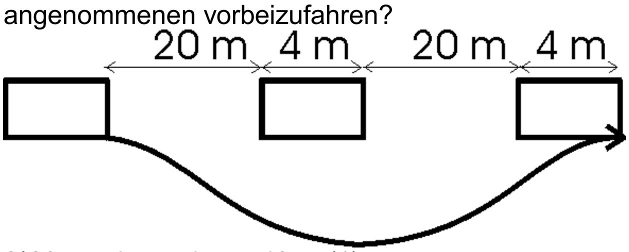
1.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$v_1 = 20\,\frac{km}{h}$
$v_2 = 80\,\frac{km}{h}$</td><td>ges.:</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="3">Wenn das Auto den Radfahrer eingeholt hat, haben beide Fahrzeuge die gleiche Strecke zurückgelegt. Es gilt also:
$s_1 = s_2$
Die bis dahin benötigten Zeiten unterscheiden sich um 2 Stunden, die Zeit des Radfahrers ist 2 Stunden größer.
$t_1 = t_2 + 2h$
Weiterhin gilt, da die Bewegungen als gleichförmig betrachtet werden,:
$v = \frac{s}{t}$
Nach s umgestellt und in die erste Gleichung eingesetzt:
$s = v \cdot t$
$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$
Setzt man die 2. Gleichung noch ein, kann man eine der Fahrzeiten ausrechnen:
$v_1 \cdot t_2 + 2h = v_2 \cdot t_2$
$v_1 \cdot t_2 + v_1 \cdot 2h = v_2 \cdot t_2$
$v_1 \cdot 2h = v_2 \cdot t_2 - v_1 \cdot t_2$
$v_1 \cdot 2h = t_2 \cdot (v_2 - v_1)$
$t_2 = \frac{v_1 \cdot 2h}{(v_2 - v_1)}$
$t_2 = \frac{2}{3}h$
Das Auto fährt 2/3 h. Das sind 40 min. Da er 9.00 Uhr losgefahren ist, erreicht er den Radfahrer um 9.40 Uhr.
Er ist dabei
$s = v \cdot t$
$s = 80\,\frac{km}{h} \cdot \frac{2}{3}h$
$s = 53{,}3\,km$
gefahren. Der Radfahrer ebenfalls:
$s = v \cdot t$
$s = 20\,\frac{km}{h} \cdot 2\frac{2}{3}h$
$s = 53{,}3\,km$</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">Die beiden treffen sich um 9.40 Uhr nach 53,3 km.</td></tr>
</table>

2.

geg.:	$A = 100\,cm^2$ $V = 18\,m^3$ $t = 1h$	ges.:	v
Lösung:	Das Öl fließt gleichförmig mit der Geschwindigkeit v. Das Volumen, dass gefordert ist, ist allgemein die Fläche des Rohrquerschnitts mal die Länge einer Ölssäule. $V = A \cdot s$ $s = \frac{V}{A}$ $s = \frac{18\,m^3}{100 \cdot 10^{-4}\,m^2}$ $s = 1800\,m$ In einer Stunde muss das Öl aus 1800 m Rohrleitung herauslaufen. $v = \frac{s}{t}$ $v = \frac{1{,}800\,km}{1h}$ $v = 1{,}8\,\frac{km}{h}$		
Antwort:	Das Öl muss mit einer Geschwindigkeit von 1,8 km/h oder 0,5 m/s durch die Rohleitung fließen.		

3.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$v_1 = 60\frac{km}{h} = 16{,}7\frac{m}{s}$
$v_2 = 70\frac{km}{h} = 19{,}4\frac{m}{s}$
$a_1 = a_2 = 20m$
$l_1 = l_2 = 4m$</td><td>ges.:</td><td>t, s</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="3">Man betrachtet das langsame Auto als ruhend -> Relativgeschwindigkeit 10 km/h = 2,8 m/s (1)
Welchen Weg muß das schnelle Auto zurücklegen, um an dem als stehend angenommenen vorbeizufahren?


2*20m + 4 m + 4 m = 48 m (1)
Die Zeit dafür:
$v = \frac{s}{t}$
$t = \frac{s}{v}$
$t = 17{,}1s$

Bei der zurückgelegten Strecke muß wieder mit der wirklichen Geschwindigkeit gerechnete werden:
$s = v \cdot t$
$s = 19{,}4\frac{m}{s} \cdot 17{,}1s$
$s = 332m$</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">Der Überholvorgang dauert 17 s, das Auto legt dabei einen Weg von 332 m zurück.</td></tr>
</table>

4. Die Straßenbahn steht und das Auto fährt mit der Differenzgeschwindigkeit von 18 km/h = 5 m/s. Da der Abstand 60 m beträgt, braucht das Auto 12 s, um die Straßenbahn einzuholen. Damit fährt das Auto in dieser Zeit 15 m/s * 12 s = 180 m. Die Straßenbahn fährt 10 m/s * 12 s = 120 m. Der Abstand zwischen beiden Strecken beträgt 60 m, das war aber in der Aufgabe schon gegeben (= Probe).

5.

geg.:	$v_P = 130\,\frac{km}{h}$ $v_L = 100\,\frac{km}{h}$ $s_{P-L} = 100\,m$ $s_A = 1000\,m$ $s_L = 10\,m$	ges.:	s
Lösung:	Die Frage ist, wieviel m vor der Abfahrt kann ich vor dem LKW wieder auf die rechte Spur kommen. Dabei muss der 2 s-Abstand eingehalten werden. Dass heißt, der Sicherheitsabstand zwischen dem LKW und mir muss so groß sein, wie der LKW in 2 s fährt. $v = \frac{s}{t}$ $s = v \cdot t$ $s = 27{,}8\,\frac{m}{s} \cdot 2\,s$ $s = 55{,}6\,m$ Welchen Weg muss ich insgesamt zurücklegen? Als erstes nimmt man an, dass der LKW steht und ich an ihm mit der Differenzgeschwindigkeit vorbei fahre. Die Differenzgeschwindigkeit beträgt 30 km/h. Wie groß ist der Weg bei stehendem LKW? Mein Abstand zum LKW vor dem Überholen + die Länge des LKW + die Länge meines Autos + der Abstand LKW - Auto nach dem Überholen. Mein Auto ist 4 m lang. Also: $s = 100\,m + 10\,m + 4\,m + 55{,}6\,m$ $s = 169{,}6\,m$ Wie lange brauche ich dafür mit 30 km/h? $v = \frac{s}{t}$ $t = \frac{s}{v}$ $t = \frac{169{,}6\,m}{8{,}3\,\frac{m}{s}}$ $t = 20{,}4\,s$ Wie weit fahre ich nun aber wirklich in dieser Zeit? $v = \frac{s}{t}$ $s = v \cdot t$ $s = 36{,}1 \cdot 20{,}4\,s$ $s = 736{,}7\,m$ Der Überholvorgang ist nach 736,7 m abgeschlossen.		
Antwort:	Bis zur Ausfahrt bleiben noch 264 m.		

6.

Lösung: Sie müssen 55,8 m am Ufer laufen und dann direkt zur Boje schwimmen. Sie benötigen dann 151 s.
Es sei A der Standort der drei Jungen, B die Boje, C der Ort senkrecht unter der Boje und D der Ort, an dem man ins Wasser springen muß. Der Winkel bei A heißt α und ist 51,3° groß, cos α = 5/8. Die gesuchte Strecke ist AD=x.
Schwimmt man direkt von A nach B benötigt man 160 s, läuft man nach C und schwimmt dann braucht man 158,3 s.

Die Lösung ist ein Beispiel für das Fermatsche Prinzip.
Eine Welle läuft zwischen zwei Punkten immer so, daß sie dazu möglichst wenig Zeit braucht. Zwischen beiden Punkten können beliebige Medien mit beliebigen scharfen oder kontinuierlichen Übergängen dazwischen liegen.
Man nimmt nun an Stelle der Welle die drei Jungen. Damit kann man das Problem mit dem Brechungsgesetz lösen:
Der Strand hat die Geschwindigkeit 3 und das Wasser die Geschwindigkeit 1. Damit ergibt sich für den Übergang Wasser - Strand eine Brechzahl von 1/3. Betrachtet man die Bewegung in umgekehrter Richtung, also von B über D nach A dann hat man gerade den Fall der Totalreflexion. Es ergibt sich ein Einfallswinkel von 19,47°, damit ist der Winkel BDA = 109,47°. Über die entsprechenden Winkelfunktionen erhält man 55,84 m für die gesuchte Strecke.

2. Möglichkeit:
Geht man von A über D nach B ergibt sich folgende Lösung:
Die Zeit setzt sich aus der Zeit t_1 (AD) und der Zeit t_2 (DB) zusammen.
$t = t_1 + t_2$.
$t = x/3v_1 + DB/v_1$

nach dem Cosinussatz ist
DB = Wurzel(160²m² + x² - 2*160m*x*cos α)

damit wird
t = x/3 + Wurzel(25600 + x² - 200x)
(Zur Vereinfachung habe ich v_1 weggelassen, da der Zahlenwert ja 1 ist. Die Einheiten werden auch nicht mehr beachtet).

Die Frage ist nun, wo hat diese Funktion ihr Minimum, denn da ist ja die Zeit am kleinsten. Dazu muß man die 1. Ableitung der Funktion bilden, diese 0 setzen und nach x umstellen. Das ist dann
0 = (Wurzel(x² - 200x + 25600)+3*(x-100)) / (3*Wurzel(x² - 200x + 25600))

Als Lösung ergibt sich dann für x = 55,8 m.