Aufgaben zum Trägheitsmoment

1. Eine Schwungscheibe (Vollzylinder) mit 100cm Durchmesser und dem Trägheitsmoment 1200kgm² hat eine Drehzahl von 70min^{-1}. Sie wird 20s lang durch ein konstantes Drehmoment von 2000Nm beschleunigt.
Zeichnen Sie das Drehwinkel-Zeit-Diagramm und das Winkelgeschwindigkeit-Zeit-Diagramm für die Zeit 5 Sekunden vor Beginn der Beschleunigung bis zum Ende der Beschleunigungsphase.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit am Rand der Scheibe nach der Beschleunigung.
Wie groß ist die Masse der Scheibe?

2. Das Trägheitsmoment einer massiven Holzwalze von 6 kg Masse, 12 cm Durchmesser und 1m Länge soll durch Einhüllen in einen Bleimantel verdreifacht werden. Wie dick muss dieser sein? (Dichte von Blei: 11,3 g/cm³)

3. a) Welche Geschwindigkeit erreicht eine Vollkugel, die auf einer schiefen Ebene aus der Höhe h reibungslos herunterläuft?
b) Wie ändert sich die Geschwindigkeit, wenn an Stelle der Kugel ein Vollzylinder mit gleicher Masse und mit gleichem Radius herab rollt?

4. Eine Kiste, eine Vollkugel (r = 10 cm) und ein Vollzylinder (r = 10 cm, l = 10 cm), deren Massen je 10 kg betragen, bewegen sich längs einer geneigten Eben von 10 m Länge und 2,5 m Höhe abwärts. Berechnen Sie Beschleunigung und Zeit für den gesamten Weg
a) für die Kiste bei reibungsfreiem Gleiten
b) für die Kiste bei einem Reibungsfaktor 0,2
c) für die Kugel
d) für den Zylinder
(bei c) und d) wird reines Rollen ohne Verlust an mechanischer Energie angenommen)

Lösungen:
1.

geg.:	$d = 1 m$ $J = 1200 kgm^2$ $n_0 = 70 min^{-1}$ $t = 20 s$ $M_D = 2000 Nm$	ges.:	

Lösung:

1. Drehwinkel – Zeit – Diagramm

Für das Diagramm müssen Wertepaare berechnet werden. Dazu wird das Drehwinkel-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Drehbewegung verwendet:

$$\sigma = \frac{\alpha}{2} \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \sigma_0$$

Dieses Gesetz entspricht in seiner Struktur dem Weg-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung.
Die Winkelbeschleunigung muss vorher berechnet werden:

$$M_D = J \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{M}{J}$$

$$\alpha = \frac{2000 Nm}{1200 kgm^2}$$

$$\alpha = 1{,}67 s^{-2}$$

Einheit:

$$[\alpha] = 1 \frac{Nm}{kgm^2}$$

$$= 1 \frac{kgms^{-2}m}{kgm^2}$$

$$= 1 s^{-2}$$

Da das Diagramm ab 5 s vor dem Beschleunigungsbeginn gezeichnet werden soll, muss der Drehwinkel für diese Zeitspanne berechnet werden:

$$\sigma = \omega \cdot t$$

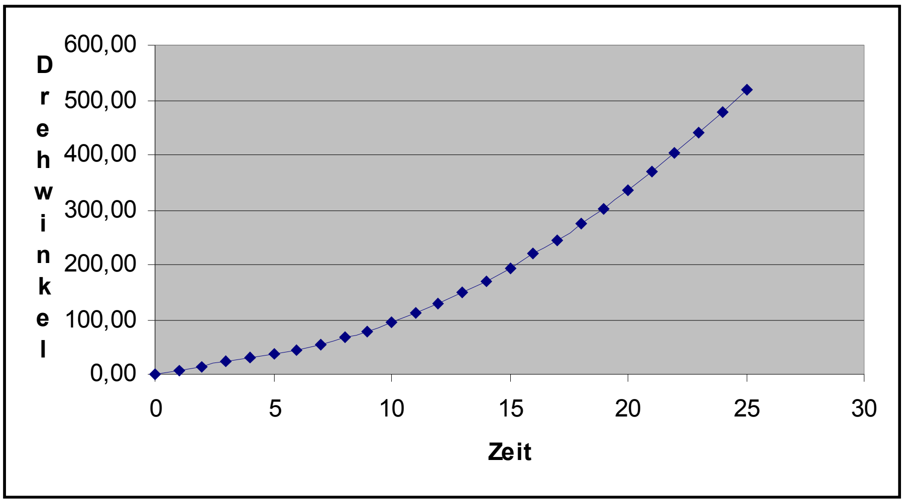
$$\sigma = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t$$

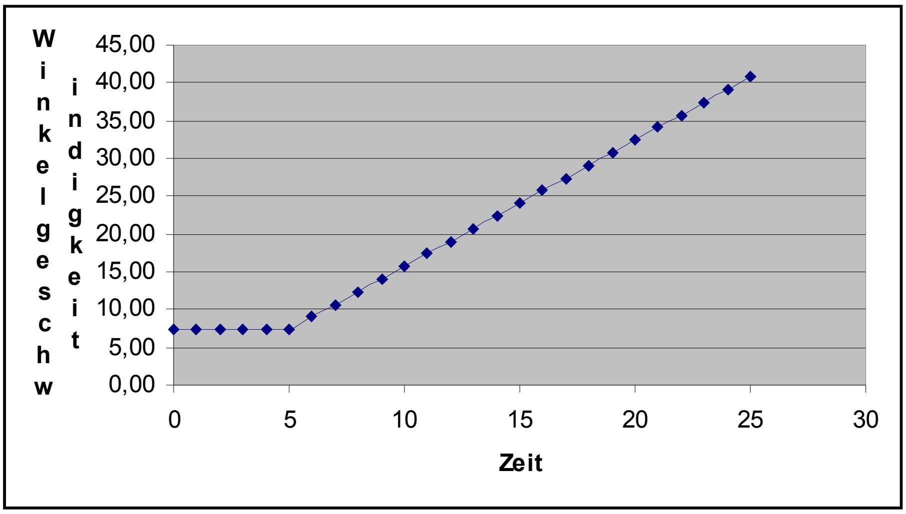
$$\sigma = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}17 s^{-1} \cdot 5 s$$

$$\sigma = 36{,}8$$

Die Einheit des Winkels ist rad.

Nun können die weiteren Winkel berechnet und das Diagramm gezeichnet werden:



<table>
<tr>
<td></td>
<td>
1) Winkelgeschwindigkeit – Zeit – Diagramm
Das Winkelgeschwindigkeit – Zeit – Gesetz lautet:
$\omega = \alpha \cdot t + \omega_0$
Dieses Gesetz entspricht in seiner Struktur dem Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung.
Die Wert werden in der gleichen Tabelle berechnet.


</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
3. Geschwindigkeit am Rand der Scheibe:
$v = \omega \cdot r$
$v = 40{,}8\,s^{-1} \cdot 0{,}5\,m$
$v = 20{,}4\,\frac{m}{s}$
4. Masse der Scheibe:
$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$
$m = \frac{2 \cdot J}{r^2}$
$m = 9600\,kg$
</td>
</tr>
<tr>
<td>Antwort:</td>
<td>Die Scheibe, die eine Masse von 9600 kg hat, dreht sich am Rand mit einer Geschwindigkeit von 20,4 m/s.</td>
</tr>
</table>

2.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$m_H = 6\,kg$
$r_H = 6 \cdot 10^{-2}\,m$
$l_H = 1m$
$\rho_B = 11{,}3\,\frac{g}{cm^3}$</td><td>ges.:</td><td colspan="2">$r_B - r_H$</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="4">1. J soll verdreifacht werden:
$J = J_H + 2 \cdot J_H$
$2 \cdot J_H = J_B$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">2. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Bleimantels?
Der Bleimantel ist ein Hohlzylinder.
$J_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(r_B^2 + r_H^2\right)$
$J_B = \frac{\rho \cdot \pi \cdot l \cdot \left(r_B^2 + r_H^2\right) \cdot \left(r_B^2 - r_H^2\right)}{2}$
$J_B = \frac{\rho \cdot \pi \cdot l \cdot \left(r_B^4 - r_H^4\right)}{2}$</td><td>$\rho = \frac{m}{V}$
$m = \rho \cdot V$
$m = \rho \cdot \pi \cdot l \cdot \left(r_B^2 - r_H^2\right)$</td><td>$V = \pi \cdot l \left(r_B^2 - r_H^2\right)$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">3. In dieser Gleichung ist r_B die gesuchte Größe. J_B ist noch nicht bekannt, kann aber aus J_H berechnet werden.
$J_H = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r_H^2$
$J_B = m \cdot r_H^2$
Die Gleichung von 2. wird nun nach r_B umgestellt und der Radius des gesamten Zylinders berechnet.
$J_B = \frac{\rho \cdot \pi \cdot l \cdot \left(r_B^4 - r_H^4\right)}{2}$
$\frac{2 \cdot J_B}{\rho \cdot \pi \cdot l} = r_B^4 - r_H^4$
$r_B = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot J_B}{\rho \cdot \pi \cdot l} + r_H^4}$
$r_B = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot m \cdot r_H^2}{\rho \cdot \pi \cdot l} + r_H^4}$
$r_B = 0{,}0614\,m$
Damit läßt sich die Dicke des Bleimantels zu 1,4 mm berechnen.</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="4">Der Bleimantel muss eine Dicke von 1,4 mm haben.</td></tr>
</table>

3. Die gesuchte Geschwindigkeit lässt sich über eine Energiebetrachtung bestimmen. Liegt die Kugel am oberen Ende der schiefen Ebene, besitzt sie nur potenzielle Energie. Beim Herabrollen wird diese in kinetische Energie sowie in Rotationsenergie umgewandelt. Die Kugel bewegt sich einmal vorwärts (E_{kin}) und gleichzeitig rotiert sie (E_{rot}).

$$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2 + \frac{J}{2} \cdot \omega^2$$

Das Trägheitsmoment der Kugel ist:

$$J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$$

Das wird eingesetzt:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2 + \frac{J}{2} \cdot \omega^2$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2 + \frac{1}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

$$g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v^2 + \frac{1}{5} \cdot r^2 \cdot \omega^2$$

$$g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v^2 + \frac{1}{5} \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2}$$

$$g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v^2 + \frac{1}{5} \cdot v^2$$

$$g \cdot h = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) \cdot v^2$$

$$g \cdot h = \frac{7}{10} \cdot v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h}{7}}$$

b) Da ein Vollzylinder ein größeres Trägheitsmoment besitzt, ist die Geschwindigkeit kleiner.

4. a) Die Kiste besitzt zu Beginn potenzielle Energie (Lageenergie), die sie vollständig in kinetische Energie (Bewegungsenergie) umwandelt. Ansatz: beide Energien sind gleich.

geg.:	m = 10 kg s = 10 m h = 2,5 m	ges.:	a, t
Lösung:	$a=\frac{v}{t}(1)$ In dieser Gleichung für a fehlt sowohl die Endgeschwindigkeit als auch die Zeit. $s=\frac{a}{2}\cdot t^2$ $t^2=\frac{2s}{a}(2)$ Gleichung (2) wird in Gleichung (1) eingesetzt, die vorher noch quadriert wird. $a^2=\frac{v^2}{t^2}$ $a^2=\frac{v^2\cdot a}{2s}$ $a=\frac{v^2}{2s}(3)$ Der Weg s ist bekannt, es fehlt nur noch die Geschwindigkeit. Die erhält man über die Energie. $E_{pot}=E_{kin}$ $m\cdot g\cdot h=\frac{m}{2}\cdot v^2$ $v^2=2\cdot g\cdot h(4)$ (4) wird in (3) eingesetzt und man erhält $a=\frac{2\cdot g\cdot h}{2\cdot s}$ $a=\frac{g\cdot h}{s}$ und eingesetzt $a=\frac{g}{4}$ $\underline{a=2{,}45\,\frac{m}{s^2}}$ Die Zeit berechnet man mit Gleichung (2) zu 2,86 s.		
Antwort:	Die Kiste wird mit g/4 = 2,45 m/s² beschleunigt und benötigt 2,86 s für die 10 m lange Strecke.		

b) Es wird nicht die gesamte potenzielle Energie in kinetische Energie umgewandelt. Ein Teil geht als Reibungsenergie (Wärme) verloren. Das heißt, es wird nicht die gesamte Hangabtriebskraft zum Beschleunigen verwendet, sondern ein Teil der Kraft dient zum Überwinden der Reibungskraft.

geg.:	μ = 0,2 m = 10 kg s = 10 m h = 2,5 m	ges.:	a, t
Lösung:	1. Berechnung der Endgeschwindigkeit Aus der potenziellen Energie wird kinetische Energie und Reibungsarbeit $E_{pot} = E_{kin} + W_r$ $m \cdot g \cdot h = \frac{m}{s} \cdot v^2 + F_r \cdot s$ $m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2 + \mu \cdot F_N \cdot s$ $F_N = \text{Normalkraft}$ $m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2 + \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot s$ cos α ist der Winkel, unter dem die geneigte Ebene ansteigt $g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot v^2 + \mu \cdot g \cdot \sqrt{s^2 - h^2}$ $g \cdot h - \mu \cdot g \cdot \sqrt{s^2 - h^2} = \frac{1}{2} \cdot v^2$ $v^2 = 2 \cdot g \cdot \left(h - \mu \cdot \sqrt{s^2 - h^2}\right)$ $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(h - \mu \cdot \sqrt{s^2 - h^2}\right)}$ 2. Beschleunigung man benutzt Gleichung (3) aus der Lösung a) $a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$ $a = \frac{2 \cdot g \cdot \left(h - \mu \cdot \sqrt{s^2 - h^2}\right)}{2 \cdot s}$ $a = \frac{g}{s} \cdot \left(h - \mu \cdot \sqrt{s^2 - h^2}\right)$ $a = 0{,}55\ \frac{m}{s^2}$ 3. Zeit es wird Gleichung (2) aus Lösung a) benutzt $t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$ $t = s \cdot \sqrt{\frac{2}{g \cdot \left(h - \mu \sqrt{s^2 - h^2}\right)}}$ $t = 6{,}04\ s$		
Antwort:	Die Kiste wird unter Berücksichtigung der Reibung mit 0,55 m/s² beschleunigt und benötigt für die Strecke 6,04 s.		

c) Die potenzielle Energie wird in kinetische Energie und in Rotationsenergie umgewandelt.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>r = 10 cm
m = 10 kg
s = 10 m
h = 2,5 m</td><td>ges.:</td><td>a, t</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="2">1. Berechnen der Endgeschwindigkeit
$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}$
$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \varpi^2$
$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2 + \frac{1}{5} \cdot m \cdot v^2$
$g \cdot h = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) \cdot v^2$
$v = \sqrt{\frac{10 \cdot g \cdot h}{7}}$
2. Beschleunigung
man benutzt Gleichung (3) aus der Lösung a)
$a = \frac{v^2}{2 \cdot s}$
$a = \frac{10 \cdot g \cdot h}{2 \cdot 7 \cdot s}$
$a = \frac{5 \cdot g \cdot h}{7 \cdot s}$
$a = \frac{5}{28} \cdot g$
$a = 1{,}75 \frac{m}{s^2}$
3. Zeit
es wird Gleichung (2) aus Lösung a) benutzt
$t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}}$
$t^2 = \frac{2 \cdot s}{a}$
$t^2 = \frac{2 \cdot s \cdot 7 \cdot s}{5 \cdot g \cdot h}$
$t = s \cdot \sqrt{\frac{14}{5 \cdot g \cdot h}}$
$t = 3{,}38\,s$</td><td>Nebenrechnung
$E_{rot} = \frac{1}{2} J \cdot \varpi^2$
$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \varpi^2$
$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2}$
$E_{rot} = \frac{1}{5} \cdot m \cdot v^2$</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">Die Kugel wird mit 1,75 m/s² beschleunigt und benötigt 3,38 s.</td></tr>
</table>

d) Lösung erfolgt wie in c), nur das Trägheitsmoment wird verändert. Trägheitsmoment Vollzylinder:

$$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

Damit erhält man:

Endgeschwindigkeit: $v = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{3}}$

Beschleunigung: $a = \frac{2 \cdot g \cdot h}{3 \cdot s} = \frac{g}{6} = 1{,}64\ \frac{m}{s^2}$

Zeit: $t = s \cdot \sqrt{\frac{3}{g \cdot h}} = 3{,}5\ s$