Aufgaben zum Thema Schwingungen

1. Ein Körper der Masse 2 kg hängt an einer Feder mit der Federkonstanten D = 8 N/m. Seine maximale Auslenkung aus der Ruhelage beträgt 20 cm. Welchen Abstand zur Ruhelage besitzt die schwingende Masse
a) 1,0 s?
b) 2,0 s?
c) 3,0 s?
nach Durchschwingen der Ruhelage?

2. Ein Fadenpendel der Länge 40 cm wird um 12 cm ausgelenkt und losgelassen.
a) Bestimmen Sie seinen Abstand zur Ruhelage, seinen Geschwindigkeitsbetrag und seinen Beschleunigungsbetrag 10 Sekunden nach dem Loslassen durch die Ruhelage. (Die Bewegung sei reibungsfrei.)
b) Zeichnen Sie für die Elongation, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung für die ersten 2 Sekunden der Schwingung das entsprechende Diagramm.

3. Eine Pendeluhr besitzt auf der Erde die Schwingdauer 1,8 Sekunden. Wie groß ist die Schwingdauer der Pendeluhr auf dem Mond (Schwerebeschleunigung auf dem Mond: g = 1,62 m/s²)?

4. An einem 20 m langen Kranseil hängt ein Betonteil der Masse 1,0 t. Auf Grund einer Unachtsamkeit des Kranführers beginnt das Seil mit der maximalen Auslenkung von 5,0° zu schwingen.
a) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit, die das Betonteil im Verlauf der ersten Periode erreicht.
b) Berechnen Sie die Periodendauer und stellen Sie die horizontale Auslenkung in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar.
Geben Sie mindestens zwei Gültigkeitsbedingungen für Ihre verwendeten Gleichungen an.
c) Begründen Sie, dass die Kraft, die das Seil belastet, beim Durchschwingen der Gleichgewichtslage am größten ist. Berechnen Sie den Betrag dieser Kraft.

5. Ein im Wasser schwimmender Holzquader von der Höhe h und der Dichte ρ_K wird bis zur Oberkante ins Wasser gedrückt und losgelassen. Er führt nun eine auf- und niederschwingende Bewegung aus. Welcher Ausdruck ergibt sich für die Periodendauer?

Lösungen:

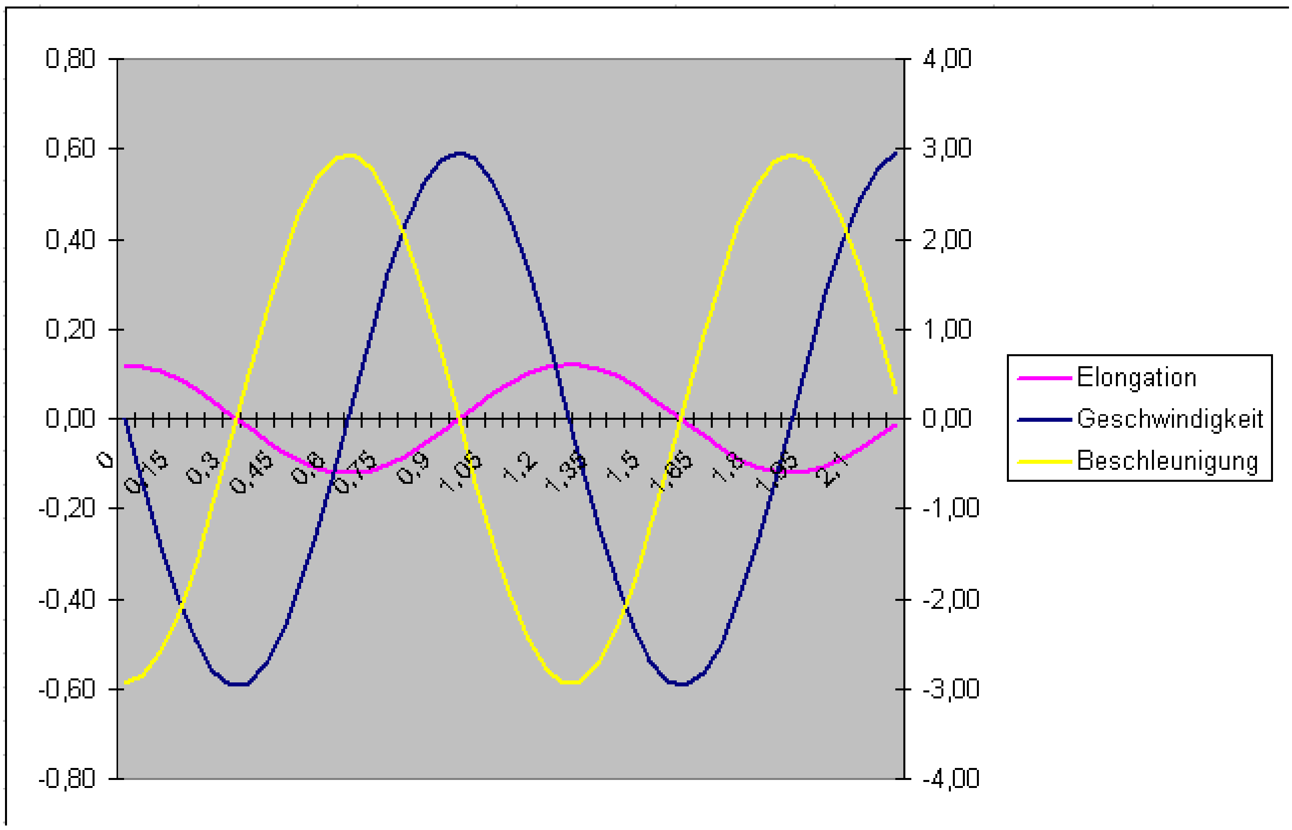
1.

geg.:	$m=2kg$ $D=8\,\frac{N}{m}$ $\hat{y}=20\,cm$ $t_1=1s$ $t_2=2\,s$ $t_3=3\,s$	ges.:	y_1, y_2, y_3
Lösung:	Die Elongationen berechnen sich nach der Gleichung für die harmonische Schwingung: $y=\hat{y}\cdot\sin(\omega\cdot t)$ Die Kreisfrequenz kann extra berechnet werden: $\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}$ $\omega=\frac{2\cdot\pi}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{D}}}$ $\omega=\frac{2\cdot\pi}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{0{,}25\,s^2}}$ $\omega=\frac{2\cdot\pi}{2\cdot\pi\cdot 0{,}5\,s}$ $\omega=2\,s^{-1}$ Damit wird: $y=\hat{y}\cdot\sin(\omega\cdot t)$ $y_1=20\,cm\cdot\sin(2\,s^{-1}\cdot 1s)$ $y_1=18{,}2\,cm$ $y_2=-15{,}14\,cm$ $y_3=-5{,}6\,cm$ Das negative Vorzeichen vor den letzten beiden Ergebnissen macht eine Aussage über die Seite bezüglich des Umkehrpunktes.		
Antwort:	Nach1 s ist der Körper 18,2 cm über dem Umkehrpunkt. Nach 2 s ist er 15,1 cm und nach 3 s 5,6 cm unter dem Umkehrpunkt.		

2.

geg.:	$l = 0{,}4\,m$ $\hat{y} = 0{,}12\,m$ $t = 10\,s$	ges.:	y, v, a

Lösung:	Zuerst muss die Schwingungsdauer berechnet werden: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}4\,m}{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}}$ $T = 1{,}269\,s$ Wenn das Pendel bei einem Abstand von 12 cm von der Ruhelage losgelassen wird, erreicht es nach 1,269s/4=0,3171 s die Ruhelage. In der Schwingungsgleichung muss diese Zeit berücksichtigt werden und zu den 10 s hinzugezählt werden. Auf der anderen Seite haben die Elogationen dann negative Werte. Damit lässt sich über die Gleichung der harmonischen Schwingung die Elongation berechnen. (Hinweis: Taschenrechner in den Modus Radiant umschalten) $y = \hat{y} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ $y = \hat{y} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t + \frac{T}{4}\right)$ $y = 0{,}12\,m \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{1{,}269\,s} \cdot (10\,s + 0{,}3171\,s)\right)$ $y = 0{,}088\,m$ $y = 8{,}8\,cm$ Die Geschwindigkeit ist die erste Ableitung des Weges (y) nach der Zeit: $v = \frac{dy}{dt}$ $v = \hat{y} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$ $v = \hat{y} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{1{,}269\,s} \cdot (10\,s + 0{,}3171\,s)\right)$ $v = 0{,}406\,\frac{m}{s}$ Die Beschleunigung ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit: $a = \frac{dv}{dt}$ $a = -\hat{y} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ $a = -\hat{y} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \left(t + \frac{T}{4}\right)\right)$ $a = -2{,}17\,\frac{m}{s^2}$
Antwort:	Das Pendel ist nach 10 s 9 cm vom Ruhepunkt auf der Startseite entfernt. Dort hat es noch eine Geschwindigkeit von 0,41 m/s. Die Beschleunigung beträgt -2,17 m/s². Das bedeutet, es ist kurz vor dem Umkehrpunkt und bremst ab.

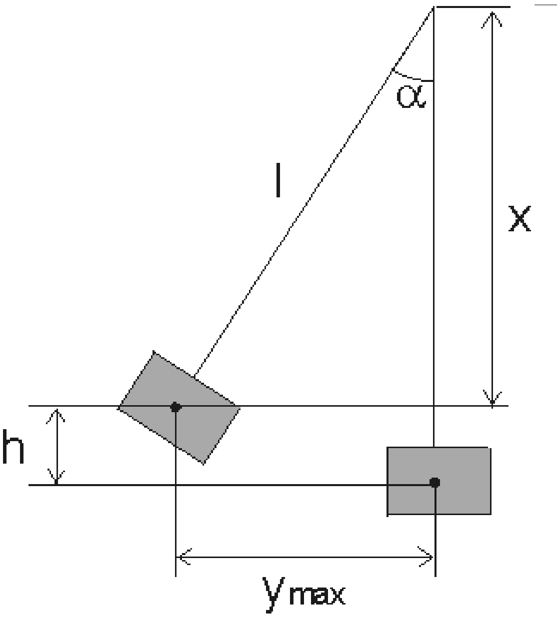


Diagramm, mit Excel gezeichnet. Die Einteilung der y-Achsen und die Höhe der Kurven müssen nicht beachtet werden.

3.

geg.:	$t_M = 1{,}8\,s$ $g_E = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ $g_M = 1{,}62\,\frac{m}{s^2}$	ges.:	T_M
Lösung:	Sowohl auf der Erde als auch auf dem Mond ist die Länge des Pendels gleich. Man stellt die Schwingungsgleichung nach der Länge um, setzt sie für Mond und Erde gleich und kann die gesuchte Größe berechnen. $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$ $T^2 = 4\cdot\pi^2\cdot\frac{l}{g}$ $l = \frac{T^2\cdot g}{4\cdot\pi^2}$ Gleichsetzen: $l_E = l_M$ $\frac{T_E^2\cdot g_E}{4\cdot\pi^2} = \frac{T_M^2\cdot g_M}{4\cdot\pi^2}$ $T_E^2\cdot g_E = T_M^2\cdot g_M$ $T_M = \sqrt{\frac{T_E^2\cdot g_E}{g_M}}$ $T_M = T_E\cdot\sqrt{\frac{g_E}{g_M}}$ $T_M = 4{,}43\,s$		
Antwort:	Auf dem Mond führt das Pendel eine Schwingung in 4,43 s durch. Das ist die Schwingungsdauer auf der Erde mal der Wurzel aus dem Verhältnis der Schwerebeschleunigungen.		

4.

geg.:	$l = 20\,m$ $m = 1 \cdot 10^3\ kg$ $\alpha = 5°$	ges.:	a) v
Lösung:	1. Wie hoch wird das Betonteil gehoben? Aus der Skizze kann man ablesen: $\cos\alpha = \frac{x}{l}$ $x = \cos\ \alpha \cdot l$ $x = 19{,}92\,m$ Damit wird das Betonteil 0,076 m angehoben und besitzt gegenüber der Ruhelage potenzielle Energie. Diese wird beim Zurückschwingen in kinetische Energie umgewandelt. $E_{pot} = E_{kin}$ $m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2$ $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ $v = 1{,}22\,\frac{m}{s}$	 	

	b) Schwingungsdauer: $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ $T = 8{,}97\,s$ Die grafische Darstellung erfolgt nach der Gleichung $y = y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ Dabei berechnet sich die Amplitude entsprechend der Skizze nach $\sin\alpha = \frac{y_{max}}{l}$ $y_{max} = \sin\alpha \cdot l$ $y_{max} = 1{,}7\,m$ Die grafische Darstellung ist eine Sinuskurve mit der Amplitude 1,7 m und den Nulldurchgängen 0s; 4,49s und 8,97s. Gültigkeitsbedingungen: Reibungsfrei, das Betonteil wird als Massepunkt berachtet, die Gleichungen gelten nur für kleine Amplituden. c) Auf das Seil wirken zwei Kräfte: Die Radialkraft und die Normalkraft. Radialkraft (hält das Betonteil auf der Kreissegmentbahn): $F_R = \frac{m \cdot v^2}{r}$ Normalkraft (entsteht durch die Anziehungskraft der Erde und wirkt in Richtung des Seiles) : $F_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$ In der Gleichgewichtslage ist die Geschwindigkeit am größten -> die Radialkraft ist am größten. In der Gleichgewichtslage ist der Winkel 0°, damit ist der Cosinus = 1 und die Normalkraft entspricht der Gewichtskraft. $F = F_R + F_N$ $F = 9{,}9\,kN$
Antwort:	a) Die maximale Geschwindigkeit erreicht das Betonteil beim Zurückschwingen im Ruhepunkt. Diese Geschwindigkeit beträgt 1,22 m/s. c) Die Kraft in der Gleichgewichtslage beträgt 9,9 kN.

5.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td></td><td>ges.:</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="3">Wird der schwimmende Holzquader ins Wasser eingetaucht, verspürt er die Auftriebskraft, die ihn wieder in die Ruhelage zurückbringen will. Die Auftriebskraft ist nach dem Archimedischen Gesetz so groß, wie die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit, also
$F_A = \rho_W \cdot V \cdot g$
Da diese Kraft proportional zur Eintauchtiefe ist (Holzquader), führt der Quader nach dem Loslassen eine harmonische Schwingung aus.
Die Richtgröße D ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der Auftriebskraft und der Eintauchtiefe s:
$F_A = D \cdot s$
$D = \frac{\rho_W \cdot V \cdot g}{s}$
Die Schwingungsdauer eines solchen Systems berechnet sich
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$
$T = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot s}{\rho_W \cdot V \cdot g}}$
Die Masse m durch das Volumen ist aber die Dichte des Quaders:
$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_K \cdot s}{\rho_W \cdot g}}$
Da die Eintauchtiefe genau h war, ergibt sich:
$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_K \cdot h}{\rho_W \cdot g}}$</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_K \cdot h}{\rho_W \cdot g}}$</td></tr>
</table>