Aufgaben zum Widerstandsgesetz

1. Eine 1,5 km lange Telefonleitung aus Kupfer soll einen Widerstand von höchstens 25 Ohm besitzen. Welchen Querschnitt muss die Leitung mindestens haben?

2. Ein Aluminium- und ein Kupferdraht sollen bei gleicher Länge den gleichen Widerstand haben. Wie groß muss der Durchmesser des Kupferdrahtes im Vergleich zum Aluminiumdraht sein?

3. Die Widerstände zweier Leiter mit kreisförmigen Querschnitt, gleicher Länge und aus gleichem Material verhalten sich wie 1:2. In welchem Verhältnis stehen die Massen der beiden Leiter?

4. Eine Baustelle ist 650 m von einer Spannungsquelle entfernt und wird durch eine Zuleitung aus Kupferdraht (0,0175 Ω mm³ / m) mit Strom versorgt. Die Belastung des Kupferdrahtes beträgt
25 A.
Berechne den durch die Zuleitung auftretenden Spannungsverlust für einen Drahtdurchmesser von 5 mm!

5. Ein gerades Drahtstück (homogen, mit konstantem Querschnitt) besitzt den elektrischen Widerstand 16 Ohm. Es wird zu einem Rechteck gebogen und zusammengelötet.
In welchem Verhältnis stehen die Längen der Rechteckseiten zueinander, wenn der Widerstand zwischen den Endpunkten einer Rechteckseite 2,0 Ohm, beträgt?

Lösungen

1.

geg.:	$l = 3\,km\,(\text{Doppelleitung!!})$ $R = 25\,\Omega$ $\rho = 0{,}017\,\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$	ges.:	A
Lösung:	$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ $A = \rho \cdot \frac{l}{R}$ $A = 2{,}04\,mm^2$		
Antwort:	Die Leitung muß einen Querschnitt von mindestens 2 mm² haben.		

2.

geg.:	$\rho_{Cu} = 0{,}017\,\Omega \cdot mm^2 \cdot m^{-1}$ $\rho_{Al} = 0{,}028\,\Omega \cdot mm^2 \cdot m^{-1}$ $l_1 = l_2$ $R_1 = R_2$	ges.:	$\frac{d_{Cu}}{d_{Al}}$

Lösung:	Es gilt das Widerstandsgesetz: $R=\rho\cdot\frac{l}{A}$ Da steht die gesuchte Größe, der Durchmesser; aber nicht drin. Es gibt aber zwischen dem Durchmesser und dem Querschnitt die Beziehung: $A=\frac{\pi}{4}\cdot d^2$, also $A \sim d^2$ Stellt man das Widerstandsgesetz nach dem Querschnitt um: $A=\rho\cdot\frac{l}{R}$ und betrachtet die konstanten Größen nicht mehr, erhält man: $A \sim \rho$ $d^2 \sim \rho$ $d \sim \sqrt{\rho}$ und dann: $\frac{d_{Cu}}{d_{Al}}=\frac{\sqrt{\rho_{Cu}}}{\sqrt{\rho_{Al}}}$ $\frac{d_{Cu}}{d_{Al}}=0{,}78$ $d_{Cu}=0{,}78\cdot d_{Al}$
Antwort:	Der Kupferdraht muss um den Faktor 0,78 kleiner, also nur etwa 3/4 des Aluminiumdurchmessers dick sein.

3.

geg.:	$l_1=l_2$ $\rho_1=\rho_2$ $\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{2}$	ges.:	$\frac{m_1}{m_2}$

Lösung:	Da beide Leiter aus gleichem Material bestehen, haben sie auch die gleichen Dichten. Die Dichte ist definiert: $\rho = \frac{m}{V}$ Damit verhalten sich die Massen der Leiter genau wie die Volumen der Leiter: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2}$ Das Volumen eines Körpers ist die Querschnittsfläche mal die Länge des Körpers: $V = A \cdot l$ Damit wird: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_1 \cdot l_1}{A_2 \cdot l_2}$ Da die Längen gleich sind, kann man kürzen: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{A_1}{A_2}$ Nach dem Widerstandsgesetz: $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ ist $R \sim \frac{1}{A}$ Also kann man schreiben: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_2}{R_1}$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{1}$ Und damit zum Schluss: $\frac{m_1}{m_2} = 2$ $m_1 = 2 \cdot m_2$
Antwort:	Der Leiter mit dem kleinen Widerstand (Leiter 1) hat eine doppelt so große Masse wie der Leiter mit dem großen Widerstand (Leiter 2)

4.

geg.:	$l = 1300\,m$ $\rho_{Cu} = 0{,}0175\,\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$ $I = 25\,A$ $d = 5\,mm$	ges.:	U_V

Lösung:	Die Länge des gesamten Drahtes beträgt 1300 m, Hin- und Rückleitung. Es wird die Spannung gesucht, die über dem Widerstand des Drahtes abfällt. Es gilt: $R=\frac{U}{I}$ $U=I\cdot R$ Der Widerstand des Drahtes muss berechnet werden: $R=\rho\cdot\frac{l}{A}$ Die Querschnittsfläche des Drahtes wird über den Durchmesser beschrieben: $A=\frac{\pi}{4}\cdot d^2$ Eingesetzt: $R=\rho\cdot\frac{4\cdot l}{\pi\cdot d^2}$ $R=0{,}0175\,\frac{\Omega\cdot mm^2}{m}\cdot\frac{4\cdot 1300\,m}{\pi\cdot 5^2\,mm^2}$ $R=1{,}16\,\Omega$ Mit diesem Widerstand lässt sich der Spannungsverlust berechnen: $U=I\cdot R$ $U=25\,A\cdot 1{,}16\,\Omega$ $U=29\,V$
Antwort:	Durch die Leitung entsteht ein Spannungsverlust von 29 V. Wird also an dem einen Ende eine Spannung von 230 V angeschlossen, liegen an der Baustelle nur noch 201 V an.

5. die Längen der Seiten sind proportional zur Größe der Widerstände => es sind die Widerstände zu berechnen

$R_1=R_3, R_2=R_4, R_G=2\Omega, 2\cdot R_2+2\cdot R_1=16\Omega$

$$\frac{1}{R_G}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{2\cdot R_2+R_1}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{16-2\cdot R_1+R_1}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{16}{R_1(16-R_1)}$$

$$0=R_1^2-16R_1+32$$

$$R_{1/1}=8\,\Omega+\sqrt{32}\Omega, \text{geht nicht, da sonst } R_1+R_3>16\,\Omega.$$

$$\underline{R_{1/2}=8\,\Omega-\sqrt{32}\Omega}$$

$$2\cdot R_2=16-16+2\cdot\sqrt{32}$$

$$\underline{R_2=\sqrt{32}}$$

Das Verhältnis der beiden Widerstände:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{8 - \sqrt{32}}{\sqrt{32}} = \frac{8 - \sqrt{16} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{16 \cdot \sqrt{2}}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$