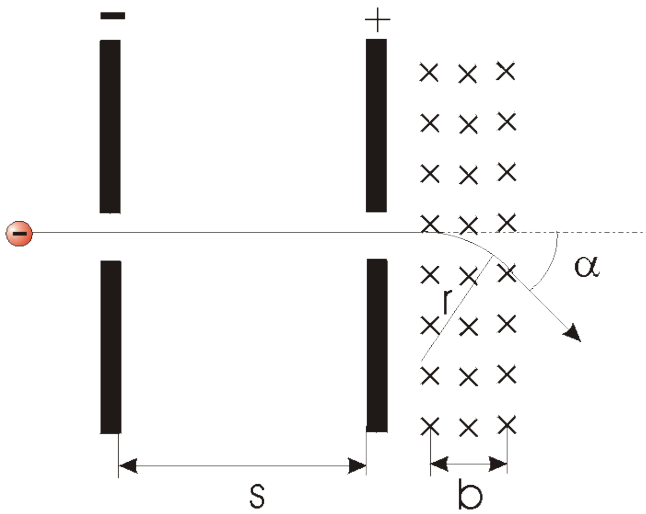
Aufgaben zur Lorentzkraft

1. Ein Elektronenstrahl tritt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 1{,}96 * 10^6\ ms^{-1}$ senkrecht zu den Feldlinien in ein homogenes Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $B = 1{,}6 * 10^{-3}$ T ein.
a) Erklären Sie, warum sich der Elektronenstrahl auf einer Kreisbahn weiterbewegt.
b) Berechnen Sie den Radius der Kreisbahn.
c) Beschreiben Sie mit Hilfe der in b) hergeleiteten Gleichung, wie sich der Radius ändern würde, wenn an Stelle der Elektronen Protonen in das Magnetfeld fliegen? (qualitativ)

2. Die Energie von α-Teilchen kann dadurch bestimmt werden, dass der Radius ihrer Kreisbahn in einem zeitlich konstanten und homogenen Magnetfeld der Flussdichte 500 mT gemessen wird. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die kinetische Energie eines solchen Teilchens, bei dem der Bahnradius 60 cm beträgt.

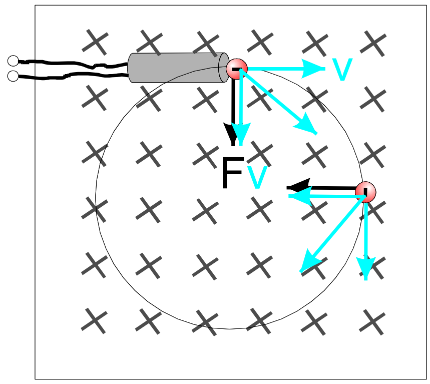
3.
Elektronen treten mit der Geschwindigkeit $2{,}0*10^5$ m/s in ein homogenes elektrisches Feld ein und durchlaufen es auf einer Strecke von s = 20 cm. Die Polung der Platten bewirkt, dass die Elektronen beschleunigt werden.
Am Ende der Beschleunigungsstrecke sollen die Elektronen eine Geschwindigkeit von $8{,}0*10^6$ m/s haben.
Anschließend treten die Elektronen senkrecht zu den Feldlinien in ein homogenes Magnetfeld ein, in der sie um $\alpha = 25°$ zu ihrer Bewegungsrichtung abgelenkt werden sollen. Das Magnetfeld ist b = 3,0 cm breit.



a) Wie groß ist die elektrische Feldstärke des Feldes im Kondensator?
b) Wie groß muss die magnetische Flussdichte sein?

4. Elektronen, die durch 150 V beschleunigt worden sind, fliegen senkrecht zu den Feldlinien in ein magnetisches Feld mit B = 0,85 mT ein und beschreiben dort einen Kreis von 48 mm Radius.
a) Berechnen Sie e/m.
b) Mit welcher Geschwindigkeit verlassen die Elektronen die Anodenöffnung. Wie lange brauchen Sie für einen Umlauf?

Lösungen
1.

geg.:	$v = 1{,}96 \cdot 10^{6}\ \frac{m}{s}$ $B = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ T$	ges.:	r
Lösung:	a) Verlässt das Elektron die Beschleunigungsstrecke, würde es sich mit einer konstanten Geschwindigkeit gerade aus weiter bewegen (Trägheitsgesetz). Da sich die Elektronen aber senkrechte zu den Magnetfeldlinien bewegen, die hier von dem Beobachter weg gerichtet sind (vor: N, hinten S), wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung auf die Elektronen eine Kraft. Diese ruft eine zweite Geschwindigkeitskomponente hervor, die nach unten gerichtet ist. Damit bewegt sich das Elektron entsprechend der resultierende Geschwindigkeit schräg nach unten. Da die Kraft auf das Elektron mit konstanter Größe, aber ständig ändernder Richtung immer senkrecht zu der resultierende Geschwindigkeit wirkt, führt das Elektron eine Kreisbewegung durch. Die Lorentzkraft wirkt hier als Radialkraft.		

	b) Radialkraft = Lorentzkraft $F_L = F_R$ $\frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B$ $r = \frac{m \cdot v}{e \cdot B}$ $r = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg \cdot 1{,}96 \cdot 10^{6}\ m \cdot s^{-1}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ T}$ $r = 6{,}96 \cdot 10^{-3}\ m$ $r = 6{,}96\,mm$ c) Da in der oben stehenden Gleichung nur die Masse größer wird, alle andern Größen aber konstant bleiben, wird der Radius auch größer. Physikalisch gesehen bedeutet dass, dass die Protonen träger sind, mehr Masse haben und damit einen größeren Bogen beschreiben.
Antwort:	Der Radius der Elektronenbahn beträgt 6,96 mm.

2.

geg.:	$Q = 2 \cdot e$ $m = 4 \cdot u$ $B = 500 \cdot 10^{-3}\ T$ $r = 6 \cdot 10^{-1}\ m$	ges.:	v, E_{kin}
Lösung:	α-Teilchen sind Heliumkerne. Sie bestehen aus zwei Protonen und zwei Neutronen. Ihre Ladung ist somit die doppelte Elementarladung. Die Masse des Teilchens ist die vierfache atomare Masseeinheit u. Die α-Teilchen werden durch die Lorentzkraft auf eine Kreisbahn gezwungen. Die dazu notwendige Radialkraft wird von der Lorentzkraft aufgebracht: $F_L = F_R$ $Q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r}$ $v = \frac{Q \cdot B \cdot r}{m}$ $v = \frac{2 \cdot e \cdot B \cdot r}{4 \cdot u}$ $v = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 500 \cdot 10^{-3}\ T \cdot 6 \cdot 10^{-1}\ m}{2 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg}$ $v = 14{,}5 \cdot 10^{6}\ \frac{m}{s}$ Einheiten: $[v] = \frac{C \cdot T \cdot m}{kg} = \frac{A \cdot s \cdot V \cdot s \cdot m}{kg \cdot m^2} = \frac{W \cdot s \cdot s}{kg \cdot m} = \frac{N \cdot m \cdot s}{kg \cdot m}$ $[v] = \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m \cdot s}{kg \cdot m} = \frac{m}{s}$ Die kinetische Energie ist: $E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$ $E_{kin} = \frac{4 \cdot u}{2} \cdot v^2$ $E_{kin} = 2 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg \cdot 210{,}25 \cdot 10^{12}\ m^2 \cdot s^{-2}$ $E_{kin} = 6{,}98 \cdot 10^{-13}\ J$ $E_{kin} = 4{,}4\,MeV$		
Antwort:	Die Teilchen fliegen mit einer Geschwindigkeit von 14,5 * 10^6 m/s. Ihre kinetische Energie beträgt 4,4 MeV.		

3.

geg.:	$v_0 = 2{,}0 \cdot 10^5\ \frac{m}{s}$ $s = 2 \cdot 10^{-1}\ m$ $v_E = 8{,}0 \cdot 10^6\ \frac{m}{s}$ $\alpha = 25°$ $b = 3 \cdot 10^{-2}\ m$	ges.:	a)E b)B

Lösung:

a) Die Elektronen kommen mit einer Anfangsgeschwindigkeit in den Kondensator geflogen. Sie besitzen also bereits kinetische Energie. Durch die Beschleunigung im Inneren des Kondensators erhöht sich diese Energie. Dazu wird an den Elektronen Arbeit verrichtet. Die dazu notwendige Energie wird vom elektrischen Feld aufgebracht. Der Ansatz lautet also:
Energie des elektrischen Feldes = Energieänderung der Elektronen.

Wie groß ist die Änderung der kinetischen Energie?

$$\Delta E_{kin} = E_{kinE} - E_{kin0}$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{m_e}{2} \cdot v_E^2 - \frac{m_e}{2} \cdot v_0^2$$

$$\Delta E_{kin} = \frac{m_e}{2} \cdot \left(v_E^2 - v_0^2\right)$$

Also gilt:

$$e \cdot U = \frac{m_e}{2} \cdot \left(v_E^2 - v_0^2\right)$$

Die Spannung ist die am Kondensator anliegende Spannung. Damit erhält man über

$$E = \frac{U}{s}$$

$$U = E \cdot s$$

dann

$$e \cdot E \cdot s = \frac{m_e}{2} \cdot \left(v_E^2 - v_0^2\right)$$

$$E = \frac{m_e}{2 \cdot e \cdot s} \cdot \left(v_E^2 - v_0^2\right)$$

$$E = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg}{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ C \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ m} \cdot \left(64{,}0 \cdot 10^{12}\ m^2\ s^{-2} - 5 \cdot 10^{10}\ m^2\ s^{-2}\right)$$

$$E = 9{,}09 \cdot 10^2\ V \cdot m^{-1}$$

Einheiten:

$$[E] = \frac{kg}{C \cdot m} \cdot m^2\ s^{-2} = \frac{kg}{A \cdot s} \cdot m \cdot s^{-2} = \frac{kg \cdot m}{A \cdot s^3} = \frac{N}{A \cdot s}$$

$$[E] = \frac{N \cdot m}{A \cdot s \cdot m} = \frac{W \cdot s}{A \cdot s \cdot m} = \frac{V \cdot A \cdot s}{A \cdot s \cdot m} = \frac{V}{m}$$

b) Im homogenen Magnetfeld bewegen sich Elektronen, die senkrecht zu den Feldlinien in das Feld eintreten, auf einer Kreisbahn. Die dazu notwendige Radialkraft wird von der Lorentzkraft aufgebracht. Es gilt:

$$F_L = F_R$$

$$e \cdot v_E \cdot B = \frac{m_e \cdot v_E^2}{r}$$

$$B = \frac{m_e \cdot v_E^2}{e \cdot v_E \cdot r}$$

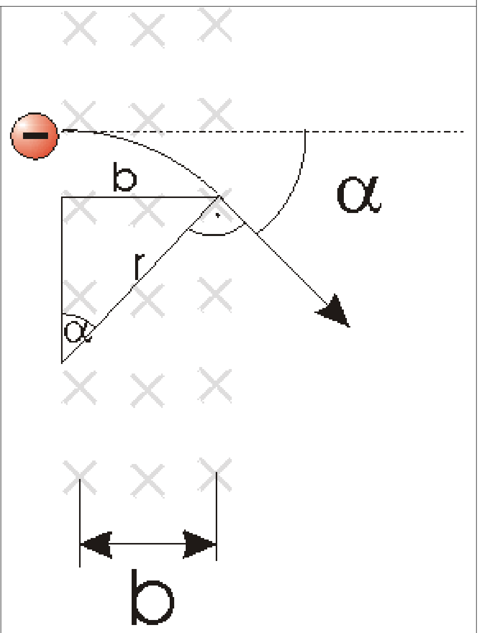
$$B = \frac{m_e \cdot v_E}{e \cdot r}$$

Der Radius der Kreisbahn ist unbekannt. Wir kennen aber den Winkel, unter dem die Elektronen abgelenkt werden sollen. Da der Radius senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor steht, läßt sich ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren. Es gilt:

$$\sin\alpha = \frac{b}{r}$$

$$r = \frac{b}{\sin\alpha}$$

Damit kann nun die magnetische Flussdichte berechnet werden:



$$B = \frac{m_e \cdot v_E}{e \cdot r}$$

$$B = \frac{m_e \cdot v_E \cdot \sin\alpha}{e \cdot b}$$

$$B = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 8{,}0 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \cdot \sin 25^\circ}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}}$$

$$B = 6{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$$

$$B = 64\,\mathrm{mT}$$

Einheiten:

$$[B] = \frac{\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}}{\mathrm{C \cdot m}} = \frac{\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}}{\mathrm{A \cdot s \cdot m}} = \frac{\mathrm{kg \cdot s^{-2} \cdot m}}{\mathrm{A \cdot m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A \cdot m}}$$

$$[B] = \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{A \cdot m^2}} = \frac{\mathrm{W \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m^2}} = \frac{\mathrm{V \cdot A \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m^2}} = \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{T}$$

Antwort:	Die elektrische Feldstärke ist 910 V/m und die magnetische Flussdichte 64 mT groß.

4.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>U = 150V
B = 0,85 mT
r = 48 * 10^{-3} m</td><td>ges.:</td><td>a) $\frac{e}{m}$
b) v, t</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="3">a) Geschwindigkeit der Elektronen:
$E_{el} = E_{kin}$
$U \cdot e = \frac{m}{2} \cdot v^2$
$v^2 = \frac{2 \cdot U \cdot e}{m}$
Kräftegleichheit: Die Radialkraft wird durch die Lorentzkraft aufgebracht.
$F_R = F_L$
$\frac{m \cdot v^2}{r} = e \cdot v \cdot B$
$\frac{m^2 \cdot v^4}{r^2} = e^2 \cdot v^2 \cdot B^2$
$\frac{m^2 \cdot 4 \cdot e^2 \cdot U^2}{r^2 \cdot m^2} = \frac{e^2 \cdot 2 \cdot U \cdot e \cdot B^2}{m}$
$\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot U}{B^2 \cdot r^2}$
$\frac{e}{m} = 1{,}8 \cdot 10^{-11} \frac{C}{kg}$
b) Geschwindigkeit
$v^2 = \frac{2 \cdot U \cdot e}{m}$
$v = \sqrt{\frac{2 \cdot U \cdot e}{m}}$
$\underline{v = 7{,}26 \cdot 10^6 \frac{m}{s}}$
Zeit für einen Umlauf:
$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$
$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v}$
$\underline{T = 4{,}15 \cdot 10^{-8} s}$</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="3">Die spezifische Ladung für das Elektron beträgt 1,8 * 10^{-11} C/kg.
Das Elektron fliegt mit einer Geschwindigkeit von 7,26*10^6 m/s und benötigen 4,15 *10^{-8} s für einen Umlauf.</td></tr>
</table>