Aufgaben zum Energieerhaltungssatz

1. Beim Zusammenstellen eines Reisezuges wird ein Waggon mit 31 t Masse bereitgestellt. Er rollt einen Ablaufberg mit dem Neigungswinkel 1,7° von einer Höhe 1,0 m mit der Anfangsgeschwindigkeit 1,40 ms^{-1} hinab und bewegt sich dann in der horizontalen Ebene geradlinig weiter. Entlang des gesamten Weges beträgt die mittlere Reibungszahl 0,0020. Berechnen Sie die Länge des horizontalen Weges, den der Waggon beim Ausrollen bis zum Stillstand fahren würde.

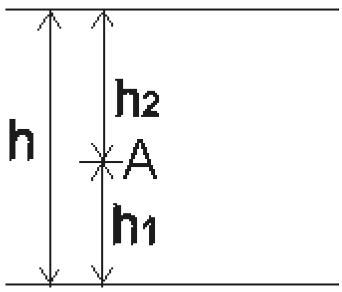
2. Welcher Wasserstrom in l/min ist erforderlich, wenn bei einem Gefälle von 4,5 m bei einer Wasserturbine eine Leistung von 70 kW abgenommen werden soll? Der Turbinenwirkungsgrad beträgt 80 %.

3. Die zwei Pufferfedern eines Eisenbahnwagens (10 t Masse) werden um je 10 cm eingedrückt, wenn dieser mit der Geschwindigkeit 1 ms^{-1} auf ein festes Hindernis prallt. Wie groß ist die Federkonstante einer jeden Feder?

4. Bei Bremsvorgängen vollziehen sich Energieumwandlungen.
Ein LKW mit der Gesamtmasse 25t fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer 18 km langen Strecke aus der Höhe 1800 m über dem Meeresspiegel bis auf 634 m Höhe herab. Bereits ohne Einsatz der Bremsen tritt ein bremsender Kraftbetrag (Fahrtwiderstand) von 5,0 % des Gewichtskraftbetrages auf.
Berechnen Sie die Wärme, die die Bremsen des LKW bei der Abwärtsfahrt aufnehmen.

5.

a) Eine Masse m soll senkrecht auf die Höhe h gehoben werden. Zu diesem Zweck wird sie längs der ersten Teilstrecke h_1 gleichförmig so beschleunigt, dass sie darüber hinaus noch um die zweite Teilstrecke h_2 steigt. Welcher Ausdruck ergibt sich für die erforderliche Beschleunigung a?



b) Ein Arbeiter wirft einen Sack mit der Masse 50 kg mit einem Kraftaufwand von 600 N auf die Schulter (Gesamthöhe 1,50 m). Welche Teilstrecke h_1 hat er unter Kraftaufwand zu überwinden, und wie lange dauert der gesamte Vorgang?

Lösungen

1.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>$m = 31 \cdot 10^3\ kg$
$\alpha = 1{,}7°$
$h = 1{,}0\ m$
$v_0 = 1{,}4\ \frac{m}{s}$
$\mu = 0{,}002$</td><td>ges.:</td><td>s</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="3">Energiebetrachtung: Der Waggon besitzt oben auf dem Ablaufberg kinetische Energie, da er eine Anfangsgeschwindigkeit hat, und potentielle Energie, da er eine Höhe über dem Erdboden hat.
Beim Herabrollen wird aus der gesamten potentiellen Energie kinetische Energie. Dadurch ändert sich der Gesamtenergiebetrag des Wagons noch nicht. Da aber die Reibung wirkt, wird Energie in in Form von Wärme abgegeben. Der Gesamtenergiebetrag nimmt dadurch ab.
Am Ende des Ablaufberges hat er also die kinetische Energie des Anfangs + potentielle Energie durch das Hinabrollen – durch die Reibung verloren gegangene Energie.
Rollt der Waggon dann auf den Gleisen entlang, wird seine kinetische Energie vollständig in Wärme durch Reibung umgewandelt. Er kommt zum Stillstand, wenn die gesamte Energie in Wärme umgewandelt wurde.
1. Wie groß ist die Energie am Ende des Ablaufberges?
$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} - E_r$</td></tr>
<tr><td></td><td>$E_{kin} = \frac{m}{2} \cdot v^2$
$E_{kin} = \frac{31 \cdot 10^3\ kg}{2} \cdot \left(1{,}4\ \frac{m}{s}\right)^2$
$E_{kin} = 30380\ J$</td><td colspan="2">$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$
$E_{pot} = 31 \cdot 10^3\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 1m$
$E_{pot} = 304110\ J$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">Allgemein ist die verrichtet Arbeit Kraft mal Weg. Die wirkende Kraft ist die Reibungskraft und der Weg die Länge des Ablaufberges.
Die Länge des Ablaufberges erhält man über den Winkel und die Höhe:
$\sin\alpha = \frac{h}{s}$
$s = \frac{h}{\sin\alpha}$
Für die Berechnung der Reibungskraft benötigt man noch die Normalkraft. Das ist die Kraft, die senkrecht auf die Unterlage wirkt.
$F_N = F_G \cdot \cos\alpha$
Damit wird die Reibungsarbeit:</td></tr>
</table>

	$E_R = F_R \cdot s$ $E_R = F_N \cdot \mu \cdot s$ $E_R = \frac{F_G \cdot \cos\alpha \cdot \mu \cdot h}{\sin\alpha}$ $E_R = \frac{m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \mu \cdot h}{\sin\alpha}$ $E_R = \frac{31 \cdot 10^3\,kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot \cos 1{,}7° \cdot 0{,}002 \cdot 1m}{\sin 1{,}7°}$ $E_R = 20493\,J$
	Damit ist die Gesamtenergie in Form von kinetischer Energie am Ende des Berges 313997 J. Diese Energie wird durch Reibungsarbeit in Wärme umgewandelt: $F_R = F_N \cdot \mu$ $W_R = F_R \cdot s$ $W_R = F_N \cdot \mu \cdot s$ $s = \frac{W_R}{F_N \cdot \mu}$ Die Normalkraft ist hier die Gewichtskraft. $s = \frac{W_R}{m \cdot g \cdot \mu}$ $s = \frac{304187\,J}{31 \cdot 10^3\,kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}002}$ $s = 516\,m$
Antwort:	Der Waggon kann maximal 516 m weit rollen. Üblich ist, dass er vorher an den Zug stößt, der gerade zusammengestellt wird.

2.

geg.:	$h = 4{,}5\,m$ $P = 70\,kW$ $\eta = 0{,}8$ $t = 60\,s$	ges.:	m
Lösung:	Das Wasser besitzt in 4,5 m Höhe eine bestimmte potentielle Energie, die beim Herabstürzen in kinetische Energie umgewandelt wird. Diese Energie wird in der Wasserturbine in elektrische Energie umgewandelt. Die Leistung des herabstürzenden Wassers muss also so groß sein wie die elektrische Leistung der Turbine (unter Berücksichtigung des Wirkungsgrades!) $P_{el} = P_{mech} \cdot \eta$ $P_{el} = \frac{E_{pot} \cdot \eta}{t}$ $P_{el} = \frac{m \cdot g \cdot h \cdot \eta}{t}$ $m = \frac{P_{el} \cdot t}{g \cdot h \cdot \eta}$ $m = \frac{70 \cdot 10^3\ W \cdot 60\,s}{9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 4{,}5\,m \cdot 0{,}8}$ $m = 119 \cdot 10^3\ kg$		
Antwort:	Da ein Kilogramm Wasser einem Volumen von einem Liter entspricht, müssen pro Minute 119 000 Liter herabstürzen.		

3.

geg.:	$m = 10 \cdot 10^3\,kg$ $v = 1m \cdot s^{-1}$ $s = 10 \cdot 10^{-2}\,m$	ges.:	D

<table>
<tr><td rowspan="2">Lösung:</td><td colspan="2">Da es zwei Federn sind, betrachtet man eine Masse von 5 t und dazu eine Feder. Die typische Größe für die Feder ist die Federkonstante. Sie gibt an, welche Kraft notwendig ist, um eine Feder um 1 m zusammenzudrücken und berechent sich mit:
$D = \frac{F_s}{s}$
Dazu ist eine bestimmte Energie notwendig, die nach dem Spannen der Feder als Federspannenergie in der Feder ist.
Diese Energie kommt von der kinetischen Energie des Eisenbahnwagens, der ja beim Aufprall bis zum Stillstand abgebremst wird. Er gibt also seine gesamte Energie an die Federn ab.</td></tr>
<tr><td>$E_{spann} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2$
$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$
$E_{spann} = E_{kin}$
$\frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$
$D \cdot s^2 = m \cdot v^2$
$D = \frac{m \cdot v^2}{s^2}$
$D = \frac{5 \cdot 10^3\,kg \cdot (1m \cdot s^{-1})^2}{(10 \cdot 10^{-2})^2\,m^2}$
$D = 500\,\frac{kN}{m}$</td><td>Einheit:
$[D] = \frac{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}{m^2}$
$= \frac{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m}{m^2}$
$= \frac{N \cdot m}{m^2}$
$= \frac{N}{m}$</td></tr>
<tr><td>Antwort:</td><td colspan="2">Eine Feder des Puffers hat eine Federkonstante von 500 kN/m.</td></tr>
</table>

4.

geg.:	$m = 25 \cdot 10^3\,\text{kg}$ $s = 18 \cdot 10^3\,\text{m}$ $h_1 = 1800\,\text{m}$ $h_2 = 634\,\text{m}$ $F_{br} = 0{,}05 \cdot F_g$	ges.:	Q
Lösung:	Da die Geschwindigkeit bei der Abfahrt konstant bleibt, ändert sich die kinetische Energie nicht. Die Wärme, die die Bremsen aufnehmen, kommt nur durch die Abnahme der potentiellen Energie zustande. Es wird aber nicht die gesamte potentielle Energie in Wärme umgewandelt. Ein Teil geht bereits über den Fahrtwiderstand "verloren", wird also durch Reibung in andere Energieformen umgewandelt (Wärme, kinetische Energie der bewegten Luft...) Es gilt also: $Q = \Delta E - E_{br}$ $Q = m \cdot g \cdot \Delta h - F_{br} \cdot l$ $Q = 25 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1800\,\text{m} - 634\,\text{m}) - 0{,}05 \cdot 25 \cdot 10^3\,\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 18 \cdot 10^3\,\text{m}$ $Q = 65{,}2\,\text{MJ}$ Die Bremsen müssen eine Energie von 65,2 MJ aufnehmen. Um welche Temperatur sie sich dann erwärmen, hängt vom Material, der Masse sowie der Kühlung ab.		
Antwort:	Die Bremsen müssen eine Energie von 65,2 MJ aufnehmen.		

5.

geg.:	$m=50\,kg$ $F=600\,N$ $h=1{,}5\,N$	ges.:	h_1, t

Lösung:

a) Im ersten Teilstück wird Beschleunigungsarbeit und Hubarbeit verrichtet. Der Körper erhält dadurch kinetische und potentielle Energie. Die kinetische Energie wird im zweiten Teil durch Hubarbeit in potentielle Energie umgewandelt und bestimmt die Höhe h_2. Es gilt also:

$$E_{kin} = W_h$$

$$\frac{m}{2} \cdot v_1^2 = m \cdot g \cdot h_2$$

Die Geschwindigkeit berechnet sich nach den Gesetzen der gleichmäßig beschleunigten Bewegung:

$$v_1 = a \cdot t \quad \text{und} \quad h_1 = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot a \cdot h_1}$$

Eingesetzt ergibt das

$$\frac{m}{2} \cdot 2 \cdot a \cdot h_1 = m \cdot g \cdot h_2$$

$$a = g \cdot \frac{h_2}{h_1}$$

b) Beschleunigung:

$$F = m \cdot (a+g)$$

$$a = \frac{F}{m} - g$$

$$a = 2{,}19\,\frac{m}{s^2}$$

Berechnung der Höhe:

$$a = g \cdot \frac{h_2}{h_1}$$

$$a = g \cdot \frac{h - h_1}{h_1}$$

$$a = \frac{g \cdot h}{h_1} - \frac{g \cdot h_1}{h_1}$$

$$h_1 = \frac{g \cdot h}{a+g}$$

$$h_1 = 1{,}23\,m$$

	Berechnung der Zeit: Die Höhe h_2 beträgt 0,27 m. Die Bewegung bis in Höhe h_1 ist mit a beschleunigt. Die Bewegung im Teilstück h_2 ist abbremsend mit g. $h_1 = \frac{a}{2} \cdot t^2$ $t_1 = 1{,}06\,s$ $t_2 = 0{,}23\,s$ $t_{gesamt} = 1{,}29\,s$
Antwort:	a) Für die Beschleunigung ergibt sich der Ausdruck $a = g \cdot \frac{h_2}{h_1}$ b) Der Arbeiter muß die Kraft bis in eine Höhe von 1,23 m wirken lassen. Der gesamte Vorgang dauert 1,29 s.