Einige nicht ganz so leichte Aufgaben zur Mechanik

1. Auf einer geraden, horizontalen Straße fährt ein Motorrad A mit der konstanten Geschwindigkeit v_A=90kmh^{-1}.
A passiert zur Zeit t = 0 eine Marke M. Zum selben Zeitpunkt startet im Punkt P ein Motorrad B (Masse einschließlich Fahrer m = 300 kg) in gleicher Fahrtrichtung mit konstanter Beschleunigung. Nach Erreichen der Maximalgeschwindigkeit von 130 kmh^{-1} fährt er gleichförmig weiter. P ist 50 m in Fahrtrichtung von M entfernt.
a) Wie groß ist die Beschleunigung, wenn B innerhalb von t_B = 15 s seine Maximalgeschwindigkeit erreicht?
Berechnen Sie die beschleunigende Kraft.
Welche Leistung ist 5,0 s nach dem Start zur Beschleunigung erforderlich?
Welchen Weg legt B zurück, während seine Geschwindigkeit von 100 kmh^{-1} auf v_B wächst?
b) Der Nullpunkt der weiteren Betrachtungen liegt im Punkt M.
Zeichnen Sie für die Motorräder A und B die s-t-Diagramme im Bereich $0 \leq t \leq 20$ s in ein gemeinsames Achsenkreuz ein.(Querformat; 40 m = 1 cm; 1 s = 1 cm)
Entnehmen Sie der Zeichnung, und bestimmen Sie auch rechnerisch, wann und wo beide Motorräder genau nebeneinander fahren.

Lösung: Der Motorradfahrer B beschleunigt mit 2,4 m/s². Dazu ist eine Kraft von 722 N notwendig und das Motorrad leistet 8,7kW.
Um von 100 km/h auf 130 km/h zu kommen, fährt der Motorradfahrer 108,5 m.
Nach 2,24 s treffen sich die beiden Motorräder in 56 m Abstand von Punkt M zu ersten Mal. Der zweite Treffpunkt wird nach 19,88 m in 497m Entfernung vom Punkt M erreicht.

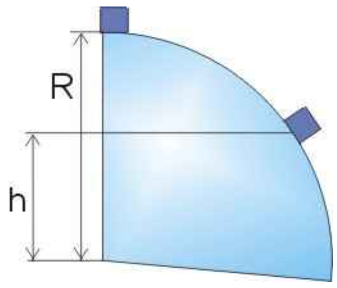
2. Im Rahmen einer Testserie wird eine einstufige Rakete von der Erdoberfläche aus vertikal nach oben gestartet. Die Gesamtmasse der Rakete beträgt 18,0 t. In dieser Gesamtmasse sind 13,5 t Treibstoff enthalten. Der Treibstoff verbrennt gleichmäßig und die Masse des Treibstoffs wurde so berechnet, dass die Brenndauer 75,0 s beträgt.
a) Messungen der Beschleunigung der Rakete ergaben:

t in s	0	15,0	30,0	45,0	60,0	75,0
a in m/s²	12,19	16,07	21,62	30,19	45,19	78,79

Zeichnen Sie das a-t-Diagramm.
Begründen Sie den Verlauf des Graphen.
b) Ermitteln Sie die 50,0 s nach dem Start erreichte Geschwindigkeit der Rakete. (z.B. durch grafische Integration)
c) Berechnen Sie:
- die Masse des während des Brennvorganges pro Sekunde verbrannten Treibstoffes,
die Schubkraft des Triebwerkes zum Zeitpunkt des Starts.

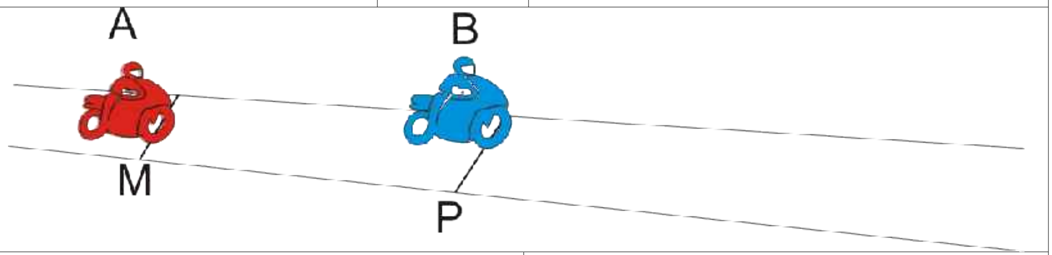
Lösung: Geschwindigkeit beträgt etwa 1087 m/s ober 1,1 km/s.
Schubkraft: 396 kN

3.Ein kleiner Quader mit der Masse m rutscht reibungsfrei von der höchsten Stelle einer ruhenden Kugeloberfläche herab. Die Anfangsgeschwindigkeit ist vernachlässigbar klein.
Berechne die Höhe h bei der die Masse von der Kugel abhebt.



Lösung: h=2/3 R

Vollständige Lösungen
1.

<table>
<tr><td>geg.:</td><td>a)
$t_B = 15s$
$v_B = 130\frac{km}{h} = 36{,}1\frac{m}{s}$
$t_B = 15s$</td><td>ges.:</td><td>a)
a,F,P</td></tr>
<tr><td>Lösung:</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung gilt:
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$
$a = \frac{36{,}1\frac{m}{s}}{15s}$
$a = 2{,}4\frac{m}{s^2}$</td><td>Damit kann mit dem Newtonschen Grundgesetz die Kraft berechnet werden:
$F = m \cdot a$
$F = 300kg \cdot 2{,}4\frac{m}{s^2}$
$F = 722N$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Für die Leistung gilt:
$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v = F \cdot a \cdot t$
$P = 722N \cdot 2{,}4\frac{m}{s^2} \cdot 5s$
$P = 8{,}7kW$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">b) Nach welcher Zeit erreicht der Fahrer die Geschwindigkeit 100 km/h?
$t = \frac{v}{a}$
$t = \frac{27{,}8\frac{m}{s}}{2{,}4s}$
$t = 11{,}6s$
Der gesuchte Weg ist die Differenz des Wege, die er bis zu den beiden Geschwindigkeit zurücklegt:
$\Delta s = s_{130} - s_{100}$
$\Delta s = \frac{a}{2} \cdot t_{130}^2 - \frac{a}{2} \cdot t_{100}^2$
$\Delta s = \frac{a}{2} \cdot \left(t_{130}^2 - t_{100}^2\right)$
$\Delta s = \frac{2{,}4\frac{m}{s^2}}{2} \cdot \left(15^2 s^2 - 11{,}6^2 s^2\right)$
$\Delta s = 108{,}5m$</td></tr>
</table>

c)

Die beiden Motorradfahrer fahren nebeneinander, wenn sie vom Punkt M aus gesehen den gleichen Abstand haben. Dem Diagramm ist zu entnehmen, dass das zweimal passiert. Am Anfang überholt der Fahrer A den Fahrer B von hinten. Da B aber nach der Beschleunigung schneller fährt als A, holt er ihn wieder ein.

1. Überhlovorgang:

Wenn man den Abstand der beiden Punkte M und P mit s_0 bezeichnet, erhält man:

$$s_A = s_B + s_0$$

$$v_A \cdot t = \frac{a}{2} \cdot t^2 + s_0$$

$$0 = \frac{a}{2} \cdot t^2 - v_A \cdot t + s_0$$

$$0 = t^2 - \frac{2 \cdot v_A}{a} \cdot t + \frac{2 \cdot s_0}{a}$$

$$t_{1/2} = \frac{v_A}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{v_A}{a}\right)^2 - \frac{2 \cdot s_0}{a}}$$

$$t_1 = 18{,}53\,s$$

$$t_2 = 2{,}24\,s$$

Die erste Zeit braucht nicht berücksichtigt zu werden, da der Beschleunigungsvorgang nach 15 s bereits abgeschlossen ist. Für die zweite Zeit von 2,24 s wird der Weg berechnet:

$s_A = v_A \cdot t$ $s_A = 25\,\frac{m}{s} \cdot 2{,}24\,s$ $s_A = 56\,m$	$s_B = \frac{a}{2} \cdot t^2 + s_0$ $s_B = \frac{2{,}4\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot (2{,}24\,s)^2 + 50\,m$ $s_B = 56\,m$

	Für den zweiten Treffpunkt sind wieder die beiden Abstände zu M gleich. Für den Fahrer B ist jetzt aber der Weg der beschleunigten Bewegung bekannt. $$s_A = s_B$$ $$v_A \cdot (t_x + 15s) = s_{Bb} + v_B \cdot t_x + s_0$$ $$v_A \cdot t_x + v_A \cdot 15s = s_{Bb} + v_B \cdot t_x + s_0$$ $$v_A \cdot t_x - v_B \cdot t_x = s_{Bb} + s_0 - v_A \cdot 15s$$ $$t_x = \frac{s_{Bb} + s_0 - v_A \cdot 15s}{v_A - v_B}$$ $$t_x = \frac{270{,}83m + 50m - 375m}{-11{,}11\frac{m}{s}}$$ $$t_x = 4{,}88s$$ Das ist die Zeit, die nach dem beenden der Beschleunigungsphase von B bis zum Treffpunkt vergeht. Damit ist die Gesamtzeit für den zweiten Treffpunkt 19,88 s. Dieser Punkt ist 497 m vom Punkt entfernt.
Antwort:	Der Motorradfahrer B beschleunigt mit 2,4 m/s². Dazu ist eine Kraft von 722 N notwendig und das Motorrad leistet 8,7kW. Um von 100 km/h auf 130 km/h zu kommen, fährt der Motorradfahrer 108,5 m. Nach 2,24 s treffen sich die beiden Motorräder in 56 m Abstand von Punkt M zu ersten Mal. Der zweite Treffpunkt wird nach 19,88 m in 497m Entfernung vom Punkt M erreicht.

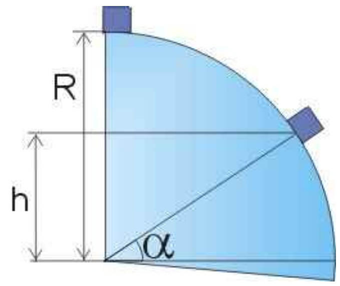
3. Der Körper führt eine Kreisbewegung durch, dazu ist eine Radialkraft notwendig. Die ergibt sich aus F_R = m*v²/r, ist also von der Geschwindigkeit abhängig. Wird die Geschwindigkeit größer, ist auch eine größere Kraft notwendig, um den Körper auf der Kreisbahn zu halten.
Die Kraft wirkt senkrecht zum Mittelpunkt hin, ist in diesem Fall also die Normalkraft F_H.
Die wird durch die Gewichtskraft aufgebracht und wird beim Herabgleiten immer kleiner (die Fläche neigt sich ja immer mehr).
Ist nun die Normalkraft nicht mehr ausreichend, um die Radialkraft aufzubringen (also Radialkraft wird größer als die Normalkraft), kann der Körper die Kreisbahn nicht mehr halten, der Radius der Bewegung wird größer, der Körper hebt ab.
Die Geschwindigkeit des Körpers berechnet sich aus der Geschwindigkeit des freien Falls. Der Weg ist dabei die Differenz R-h.

$$F_R = F_N$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g \cdot \sin\alpha \text{, mit } \sin\alpha = \frac{h}{R}$$

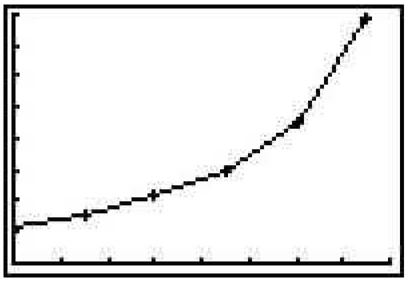
$$\text{und } v^2 = 2 \cdot (R - h) \cdot g \text{ ergibt sich}$$

$$\underline{h = \frac{2}{3} \cdot R}$$



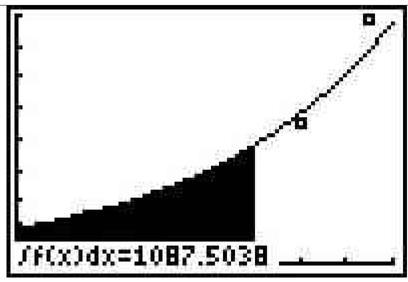
2. a)

Begründung für Verlauf: Kraft bleibt konstant, Masse wird kleiner -> Beschleunigung wird größer, F = m * a



b) Die Beschleunigung ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit. Das heißt, die Fläche unter der Kurve im a-t-Diagramm entspricht der Geschwindigkeit.
Die Geschwindigkeit wird durch grafische Integration mit Hilfe des TI-83 ermittelt.
Arbeitsschritte:
1. Eingeben der Zahlenwerte in Listen: t in L1, a in L2
2. Graph wird wie in a) dargestellt
3. Ermittlung der Funktion: STAT, CALC, 0 ExpReg, ENTER,
Es werden jetzt drei Parameter erwarte: die beiden Listen und der Name der Funktion. (durch Komma , trennen!!)
2^{nd} 1 und 2^{nd} 2 bringen die Listennamen. Weiter: VARS, Y-VARS, 1:FUNCTION, 1:Y1.
In der Anzeige steht jetzt: ExpReg L1,L2,Y1
ENTER
Die Funktion lautet: y=a*b^x mit a=11.14... und b=1,02...

Über GRAPH kann man das Ergebnis überprüfen. Es wird der Graph aus den Messwerten und die Funktion gezeichnet. Beide stimmen in etwa überein.
4. Integration: CLAC, 7:Integration, Lower Limit? 0, Upper Limit? 50
Es wird jetzt die Fläche gezeichnet, deren Inhalt berechnet wird und der Flächeninhalt angegeben: 1087.503
Damit beträgt die Geschwindigkeit etwa 1087 m/s ober 1,1 km/s.



c) Die Schubkraft ist die gesamte Kraft, die das Raketentriebwerk entwickelt. Diese Kraft wird zum Überwinden der Erdanziehung und zum Beschleunigen der Rakete verwendet. Wenn die Schubkraft so groß wie die Gewichtskraft der Rakete wäre, würde sie gerade so über dem Starttisch schweben. Sie erzeugt aber mehr und kann deshalb nach oben beschleunigen.
Die Schubkraft setzt sich also aus der Gewichtskraft der Rakete und der Beschleunigungskraft zusammen:

$$F = m \cdot a_0 + m \cdot g$$

$$F = m \cdot \left(a_0 + g\right)$$

$$F = 18000\,kg \cdot (12{,}19\,\tfrac{m}{s^2} + 9{,}81\,\tfrac{m}{s^2})$$

$$F = 396\,kN$$